活用“换元法”进行转化

——高中数学解题基本方法系列讲座（2）

■北京市第十二中学　高慧明

换元法：解数学题时，把某个式子看成一个整体，用一个变量去代替它，从而使问题得到简化，这叫换元法. 换元的实质是转化，关键是构造元和设元，理论依据是等量代换，目的是变换研究对象，将问题移至新对象的知识背景中去研究，从而使非标准型问题标准化、复杂问题简单化，变得容易处理.

换元法又称辅助元素法、变量代换法.通过引进新的变量，可以把分散的条件联系起来，隐含的条件显露出来，或者把条件与结论联系起来.或者变为熟悉的形式，把复杂的计算和推证简化.

它可以化高次为低次、化分式为整式、化无理式为有理式、化超越式为代数式，在研究方程、不等式、函数、数列、三角等问题中有广泛的应用.

换元的方法有：局部换元、三角换元、均值换元等.

局部换元又称整体换元，是在已知或者未知中，某个代数式几次出现，而用一个字母来代替它从而简化问题，当然有时候要通过变形才能发现.

例如解不等式：$4^x+2^x-2\geqslant 0$，先变形为设 $2^x=t$（$t>0$），而变为熟悉的一元二次不等式求解和指数方程的问题.

三角换元，应用于去根号，或者变换为三角形式易求时，主要利用已知代数式中与三角知识中有某点联系进行换元.如求函数 $y=\sqrt{x}+\sqrt{1-x}$ 的值域时，易发现 $x\in[0,1]$，设 $x=\sin^2\alpha$，$\alpha\in[0,\frac{\pi}{2}]$，问题变成了熟悉的求三角函数值域.为什么会想到如此设，其中主要应该是发现值域的联系，又有去根号的需要.如变量 x、y 适合条件 $x^2+y^2=r^2$（$r>0$）时，则可作三角代换 $x=r\cos\theta$、$y=r\sin\theta$ 化为三角问题.

均值换元，如遇到$x+y=S$形式时，设$x=\frac{S}{2}+t$，$y=\frac{S}{2}-t$ 等等.

我们使用换元法时，要遵循有利于运算、有利于标准化的原则，换元后要注重新变量范围的选取，一定要使新变量范围对应于原变量的取值范围，不能缩小也不能扩大. 如上几例中的 $t>0$ 和 $\alpha\in[0,\frac{\pi}{2}]$.

应用举例：

一、求解析式

例 1. (1) 已知 $f(x)=x^2$，求 $f(2x+1)$；

(2) 已知 $f(\sqrt{x}+1)=x+2\sqrt{x}$，求 $f(x)$.

(3) 设函数 $f(x)$ 满足 $f(x)+2f(\frac{1}{x})=x(x\neq 0)$，求 $f(x)$.

解析： (1) $f(2x+1)=(2x+1)^2=4x^2+4x+1$.

(2) 法 1：（换元法）：

设 $t=\sqrt{x}+1$，$\because$ 只有 $x\geqslant 0$，t 才有意义，$\therefore t\geqslant 1$，

此时 $t-1=\sqrt{x}$，$\therefore x=(t-1)^2$，

于是 $f(t)=(t-1)^2+2(t-1)=t^2-1$ $(t\geqslant 1)$.

将 t 用 x 代换，有 $f(x)=x^2-1$ $(x\geqslant 1)$.

法 2：(拼凑法)：

由于$f(\sqrt{x}+1)=x+2\sqrt{x}+1-1=(\sqrt{x}+1)^2-1$，

把$\sqrt{x}+1$ 看成新的自变量 x，则 $f(x)=x^2-1$，

$\because \sqrt{x}+1\geqslant 1$，$\therefore f(x)=x^2-1(x\geqslant 1)$.

(3) $\because$ 对任意 $x\in\mathrm{R}$ 且 $x\neq 0$ 都有$f(x)+2f(\frac{1}{x})=x$ 成立. $\therefore$ 对于$\frac{1}{x}\in\mathrm{R}$，有$f(\frac{1}{x})+2f(x)=\frac{1}{x}$，

两式组成方程组 $\begin{cases} f(x)+2f(\frac{1}{x})=x & \cdots\cdots ① \\ f(\frac{1}{x})+2f(x)=\frac{1}{x} & \cdots\cdots ② \end{cases}$

②×2−①得：$f(x)=\frac{1}{3}(\frac{2}{x}-x)$.

点评： 对应法则“f”实际上是对“x”计算的一种“程序”或“方法”. 因此要把“$2x+1$”及“$\sqrt{x}+1$”看成一个整体来求解. 可以看出换元法的基本思路是将函数符号内的式子用一个字母代换，解出自变量 x，将 x 的表达式又代入原方程，从而得出 $f(x)$ 的表达式；拼凑法主要是将函数方程中的解析式，凑成函数符号下的式子关系，然后将此式子用自变量 x 代换. 解此类题要特别注意自变量的取值范围.

例 2. 已知函数 $f(x)$ 满足 $f(\log_a x)=\frac{a}{a^2-1}(x-\frac{1}{x})$(其中$a>0$，$a\neq 1$，$x>0$)，求 $f(x)$ 的表达式.

解析： 令 $t=\log_a x$($a>1$，$t>0$；$0<a<1$，$t<0$)，则 $x=a^t$.

因此 $f(t)=\frac{a}{a^2-1}(a^t-a^{-t})$.